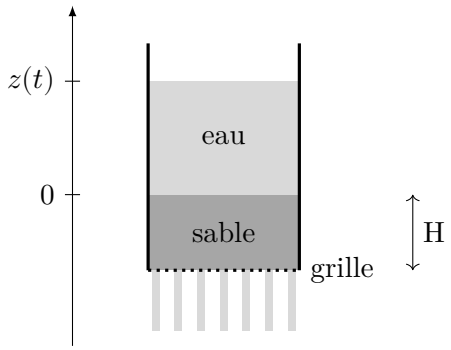
DM 6

Exercice 1 : Mesure de la perméabilité d'un sable

La perméabilité k d'un milieu poreux caractérise son aptitude à se laisser traverser par un fluide. Afin de mesurer la perméabilité d'un sable, on utilise le perméamètre représenté ci-dessous.



Le dispositif est constitué d'un cylindre dont le fond est fermé par une grille métallique recouverte d'une fine couche de coton. On introduit au fond du cylindre une hauteur $H = 10\,\text{cm}$ de sable, que l'on recouvre ensuite d'une grande quantité d'eau. Dès que la première goutte d'eau a traversé le sable, on note $z(t)$ la hauteur d'eau au-dessus du sable, avec $z_0 = 50\,\text{cm}$ la hauteur d'eau à l'instant $t = 0$. L'écoulement étant suffisamment lent, on peut supposer que celui-ci est quasi-permanent, c'est-à-dire que les accélérations sont négligeables. On peut alors montrer que la diminution de la hauteur d'eau s'effectue à la vitesse :

$$v_z(t) = -\frac{k}{\eta}\left(\rho_\text{e}\, g + \frac{\Delta P_\text{sable}}{H}\right)$$

avec η la viscosité dynamique de l'eau, ρ_e la masse volumique de l'eau, g l'intensité de la pesanteur, et $\Delta P_\text{sable} > 0$ la différence de pression à travers le sable.

1. Exprimer la différence de pression à travers le sable ΔP_sable en fonction de la hauteur d'eau $z(t)$.

2. En déduire l'équation différentielle vérifiée par $z(t)$, puis la résoudre.

3. Sachant que la dernière goutte d'eau pénètre dans le sable à l'instant $t_1 = 10\,\text{min}$, calculer la perméabilité du sable.